

5. ÜBUNGSBLATT
Prof. Stefan Friedl PhD

Abgabe spätestens bis *Donnerstag den 21. November* um 12 Uhr.

Aufgabe 1.

- (1) Es sei g eine Gerade in $\mathbb{H}$ und P ein Punkt in $\mathbb{H}$. Zeigen Sie, es gibt ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, so dass $m(g) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ und $m(P) \in \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = 0\}$.
- (2) Es seien g, h sowie k, l jeweils zwei Geradenpaare in $\mathbb{H}$, welche sich orthogonal schneiden. Zeigen Sie, es gibt ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit $m(g) = k$ und $m(h) = l$.

Aufgabe 2. Es sei $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine C^1 -Funktion. Wir betrachten dann das Längenmaß $\rho \cdot |dz|$ auf $\mathbb{C}$. Ist $(\mathbb{C}, \rho \cdot |dz|)$ notwendigerweise vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Es λ ein vollständiges C^∞ -Längenmaß auf $\mathbb{R}$ und es sei ω das euklidische Längenmaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \lambda)$ und $(\mathbb{R}, \omega)$ isometrisch sind. D.h. zeigen Sie, es gibt eine bijektive C^∞ -Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda_x(v) = \omega_{f(x)}(f'(x)v)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Schreiben Sie $\lambda = \rho \cdot \omega$ für eine C^∞ -Abbildung $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Hinweis: Die Aufgabe ist leichter als sie scheint.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, dass alle Produkte

$$A^{n_1} B^{m_1} A^{n_2} B^{m_2} \dots A^{n_k} B^{m_k}$$

mit $n_1, m_k \in \mathbb{Z}$ und $m_1, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht-trivial sind.

- (1) Wir bezeichnen mit ρ den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \rho: SL(2, \mathbb{Z}) &\rightarrow \text{Möb}(\mathbb{H}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}) \end{aligned}$$

Wir schreiben $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ und $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt, dass $\rho(A^n)(\mathbb{R}^-) \subset \mathbb{R}^+$ und $\rho(A^n)(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^-$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} -n+1 & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix} \text{ und } B^n = \begin{pmatrix} -n+1 & -n \\ n & n+1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Zeigen Sie, dass alle Produkte

$$A^{n_1} B^{m_1} \dots B^{m_{k-1}} A^{n_k}$$

mit $m_1, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht-trivial sind.

- (3) Zeigen Sie, dass alle Produkte

$$B^{m_1} A^{n_2} \dots A^{n_k} B^{m_k}$$

mit $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht-trivial sind.

- (4) Zeigen Sie, dass alle Produkte

$$A^{n_1} B^{m_1} \dots A^{n_k} B^{m_k}$$

mit $n_1, m_k \in \mathbb{Z}$ und $m_1, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht-trivial sind.